

СМАДИЕВА АСЕЛЯ ГАНИЕВНА

«НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ИХ НЕЛОКАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ»

АННОТАЦИЯ

Диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по
специальности «8D05404-Фундаментальная и прикладная математика»

Актуальность темы исследования. Расчеты дробного порядка используются в математическом моделировании, механике, физике и т. д. широко используется в промышленности. В последние годы исследование линейных и квазилинейных уравнений диффузии, содержащих производных дробного порядка, привлекло внимание многих учёных, в частности Л. Каффарелли, М. Ямамото, Р. Захера, Ю. Лучко, С. Дипьеро, Э. Вальдиноччи, М. Киране, М. Ружанский, Б. Турметов и др. Соответственно, результаты их локальной и глобальной разрешимости при исследовании начально-краевых задач для уравнений диффузии весьма актуальны.

Помимо корректности задач эволюционных уравнений, особый интерес представляют асимптотические особенности решений. Асимптотические оценки решений параболических задач с постоянным коэффициентом или дробным порядком с переменным коэффициентом получены в работах Ю. Лучко, М. Ямамото, Ч. Ли, Р. Захер, Э. Вальдиноччи и др.

Асимптотические оценки решений уравнения субдиффузии с переменными коэффициентами также достаточно изучены. Насколько нам известно, хотя в некоторых работах Б. Турметова и Б. Кадиркулова, Х. Донга и Д. Кима, Р. Захера и др. рассматривались решения начально-краевых задач для уравнений диффузии дробного порядка с сингулярным коэффициентом, а асимптотические оценки решений не рассматривались.

Дробные дифференциальные уравнения с зависящими от времени коэффициентами моделируют процессы аномальной диффузии.

Цель диссертационной работы. Целью работы является исследование следующих дробных дифференциальных уравнений

$$\partial_t^\alpha u(x, t) - a(t)A(u(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $a(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, или $\Omega \equiv \mathbb{R}^N$, и ∂_t^α – один из следующих операторов дробного порядка:

- Дробная производная Капуто:

$$\partial_t^\alpha = {}^c D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \partial_s u(x,s) ds;$$

- Дробная производная Риман – Лиувилля:

$$\partial_t^\alpha = D_{0+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(x,s) ds;$$

- Дробная производная Капуто – Адамара:

$$\partial_t^\alpha = {}^c D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} f'(s) \frac{ds}{s};$$

- Дробная производная Адамара:

$$\partial_t^\alpha = {}_H D_{a+,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t \frac{d}{dt} \int_a^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{-\alpha} f(s) \frac{ds}{s}$$

и $A(u)$ один из следующих линейных и квазилинейных операторов:

- Оператор Лапласа:

$$A(u) := \Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2};$$

- Оператор p - Лапласа:

$$A(u) := \Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u);$$

- Оператор пористой среды:

$$A(u) := \nabla(g(u) \nabla u);$$

- Вырожденный оператор:

$$A(u) := f(u) \Delta u;$$

- Оператор средней кривизны:

$$A(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right);$$

- Оператор Кирхгофа:

$$A(u) := M(\|\nabla u\|_{L^q}) \Delta u.$$

Более того, мы предполагаем, что функция $a(t)$ удовлетворяет следующему неравенству

$$(H): a(t) \geq kt^\beta, \beta > -\alpha, k > 0.$$

Объект исследования.

- Исследована разрешимость начально-краевых и начальных задач для вырождающихся уравнений диффузии, включающих дробные по времени производные Римана-Лиувилля, Капуто, Адамара, Капуто-Адамара;
- получены асимптотические оценки решений линейных и квазилинейных параболических задач с переменным коэффициентом, включающим дробную производную Капуто по времени;
- Выведены аналоги правила Лейбница для производных Адамара и Капуто-Адамара и дано их применение для получения априорных оценок решений начально-краевых задач, поставленных в уравнениях диффузии дробного порядка.

Методы научного исследования. Диссертационные задачи исследованы с использованием приемов и методов теории уравнений в частных производных, функционального анализа и дробных вычислений.

Научная новизна работы. В диссертационной работе исследуются новые проблемы линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Он также включает классические линейные задачи, а также класс задач квазилинейных с важными приложениями. Большинство обсуждаемых тем никогда ранее не рассматривались или рассматривались только применительно к определенным случаям. Таким образом, исследовательская работа обобщает известные результаты и включает совершенно новые.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Предмет исследования преимущественно теоретический и фундаментальный. Однако рассмотренные в диссертации задачи находят применение при описании аномальных диффузионных процессов.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 статей, в том числе 2 публикации в высокорейтинговых научных журналах, индексируемом в Web of Science и Scopus, 3 публикации в научных журналах, входящих в список, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в области науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан для публикации основных научных результатов научной деятельности, принята к зарубежной публикации 1 статья и 7 публикаций в материалах зарубежных международных конференций.

Результаты по теме диссертации опубликованы в следующих статьях:

В научных журналах, входящих в третий, второй и первый квартиль по данным базы данных Web of Science и/или в базе данных Scopus:

1. A. G. Smadiyeva, B. T. Torebek, Decay estimates for the time-fractional evolution equations with time-dependent coefficients//Physical and Engineering Sciences. — 2023. — 479:2276— 20230103, **Scopus (SJR 0.8, Quartile 1, Percentile 95).**

2. A. G. Smadiyeva, Degenerate time-fractional diffusion equation with initial and initial-boundary conditions//Georgian Mathematical Journal. — 2023. — Vol. 30. — Pp. 435–443, **Scopus (SJR 0.3, Quartile 3, Percentile 50).**

Принятая статья

1. A. G. Smadiyeva, Degenerate Diffusion Equation with the Hadamard Time-Fractional Derivative//Women in Analysis and PDE: Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center. —2024, (**Scopus**). <https://doi.org/10.1007/978-3-031-57005-6-38>. **Accepted.**

В журналах, рекомендованных комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования НИОКР Республики Казахстан:

1. M. Borikhanov, A. G. Smadiyeva, Cauchy problems for the time-fractional degenerate diffusion equations//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2023. — Vol. 117, no. 2. — Pp. 15–23.

2. A. G. Smadiyeva, Well-posedness of the initial-boundary value problems for the time-fractional degenerate diffusion equations//Bulletin of the Karaganda University, Mathematics Series. — 2022.— Vol. 107. — Pp. 145–151.

3. A. Smadiyeva, Initial-boundary value problem for the time-fractional degenerate diffusion equation//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2022. — Vol. 113, no. 1. — Pp. 32–41.

Публикации в материалах международных конференций

1. Смадиева А.Г., Некоторые задачи для вырожденного уравнения субдиффузии// VI Международная конференция, Нальчик, 5-9 декабря 2021г, С. 176.
2. Смадиева А. Г., On an integro-differential diffusion equation// IX Международная конференция, Актобе, 24-28 мая, 2022 г.
3. Smadiyeva Asselya, On an initial-boundary-value problems for the time-fractional diffusion equation// XII INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE GEORGIAN MATHEMATICAL UNION, Batumi, August 29 - September 3. 2022
4. A. G. Smadiyeva. The solvability of degenerate diffusion equation with the Hadamard time-fractional derivative //Международная Конференция «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения», Астана, Казахстан, 21-24 июня 2023.- p. 152.
5. Asselya Smadiyeva. Decay estimates for the degenerate time-fractional evolution equations//VII World Congress of Mathematicians of the Turkic World (TWMS Congress-2023), Turkestan, Kazakhstan, 20-23 September 2023.
6. Asselya Smadiyeva. A Cauchy-Dirichlet problem for the Hadamard time-fractional diffusion equation //PROGRAM OF THE SUMMER SCHOOL WORKSHOP “Modern Problems in PDEs and Applications” Ghent Analysis & PDE Center, Ghent University, Ghent, Belgium, 11 August 2023.
7. A. G. Smadiyeva, Decay estimates for Cauchy-Dirichlet problems // Annual International April Mathematical Conference, Almaty, April, 2024, p. 145.

Структура и объем дипломной работы. Кандидатская диссертация включает титульный лист, содержание, введение, четыре главы, заключение и список использованной литературы, состоящий из 52 наименований. Общий объем диссертации составляет 107 страниц.

Основное содержание диссертации.

В главе 1 были рассмотрены определения, леммы и свойства, использованные в диссертационной работе, а также задачи Коши, Коши-Дирихле, Коши-Неймана, поставленные в уравнении диффузии дробного порядка Римана-Лиувилля. Доказаны существование, сходимости и единственность решений представленных задач.

В главе 2 исследуются разрешимость задач и оценки решений линейных и квазилинейных уравнений диффузии с дробной производной в смысле Капуто.

В главе 3 и главе 4 рассматриваются линейные и квазилинейные уравнения диффузии с дробными производными Адамара и Капуто-Адамара. Кроме того, были получены аналоги правил Лейбница для производных Адамара и Капуто-Адамара дробного порядка и рассмотрено их применение к априорным оценкам решений задач для линейных, квазилинейных уравнений диффузии дробного порядка.